UNIDAD DE APRENDIZAJE V

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Identifica la simbología propia de la geometría y la trigonometría. 2. Identifica las unidades para medir ángulos. 3. Clasifica adecuadamente las identidades trigonométricas.	Concepto de identidad. Deducción de las identidades básicas. Identidades de ángulos compuestos. Expresiones trigonométricas equivalentes. Comprobación mediante procedimientos algebraicos

A Conceptos

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran funciones trigonométricas y se verifican para cualquier valor permitido de la variable o variables que se consideren, es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los cuales se aplican las funciones. Si la gráfica de dos funciones coincide, entonces es una identidad. En cambio, si solamente se cortan en uno o algunos puntos, entonces se trata de una ecuación trigonométrica cuyas soluciones son las abscisas de los puntos de corte.

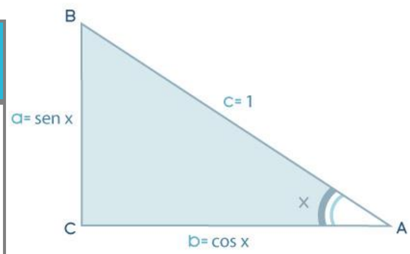
Según su **forma**, las identidades trigonométricas adquieren distintos nombres: **identidades trigonométricas de cociente** e **identidades trigonométricas pitagóricas**.

Identidades trigonométricas de cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: **tangente y cotangente** y tienen la propiedad de relacionar, por medio de un cociente, las funciones trigonométricas seno y coseno.

Si consideramos el siguiente triángulo rectángulo ***ABC***:

Función	Cociente	Demostración
Tangente A	La razón de seno x entre coseno de x se cumple para: $\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Cotangente A	La razón de coseno x entre seno x se cumple para: $\cot x = \frac{\cos x}{sen\ x}$	$\frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$ $\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$ $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$



Toma en cuenta que **las identidades trigonométricas tangentes y cotangente** están definidas por la relación del seno y el coseno por medio de un cociente; en cambio, **la función trigonométrica** se define por la relación, por medio de un cociente, de los catetos de un triángulo rectángulo.

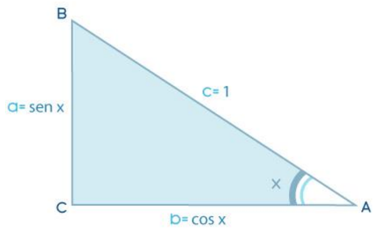
B Identidades Trigonométricas Pitagóricas

Las identidades trigonométricas pitagóricas se obtienen al aplicar el Teorema de Pitágoras a las definiciones de las funciones trigonométricas. Son **tres identidades** y se cumplen para cualquier valor del ángulo ***x***. A continuación te mencionamos cuáles son y cómo se obtienen.

Para ello nos auxiliaremos de la construcción de diferentes triángulos, los cuáles se derivan de los triángulos a partir de los cuales obtuvimos las gráficas de las funciones trigonométricas. ¿Recuerdas en el tema anterior el círculo unitario y la construcción de gráficas? Si tienes dudas, revisa nuevamente las actividades de exploración.

- $sen^2\, x + cos^2\, x = 1$

Tenemos un triángulo ***ABC*** en donde la hipotenusa es igual a **1**, el cateto opuesto es igual a ***sen x***, y el cateto adyacente es igual a ***cos x*** .



$$sen\ x = \frac{a}{1}$$
$$\cos x = \frac{b}{1}$$

Si despejamos:

$a = (1)senx \quad \therefore a = sen\ x$ $\qquad\qquad b = (1)\cos x \quad \therefore b = \cos x$

Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo:

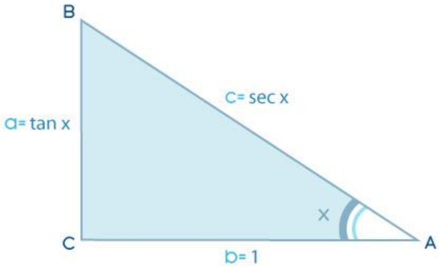
$$(1)^2 = (sen\ x)^2 + (cos\ x)^2$$

$$\mathbf{1 = sen^2\, x + cos^2\, x}$$

- $sec^2\, x = tan^2\, x + 1$

Supongamos que tenemos un triángulo ***ABC*** en donde el cateto adyacente es igual a **1** y el cateto opuesto es igual a ***tan x*** , por lo que la hipotenusa debe cumplir con ser igual a la ***sec x***

$$\tan x = \frac{a}{1}$$
$$\sec x = \frac{c}{1}$$



Si despejamos:

$$a = (1)\tan x \qquad \therefore\ a = \tan x$$

$$c = (1)\sec x \qquad \therefore\ c = \sec x$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo:

$$\sec^2 x = (\tan x)^2 + (1)^2$$

$$\boldsymbol{\sec^2 x = \tan^2 x + 1}$$

Con lo que queda demostrada esta identidad.

- ***$csc^2\ x = 1 + cot^2\ x$***

C Demostración de Identidades Trigonométricas

Como habíamos mencionado, **una identidad es una relación que contiene funciones trigonométricas.** Además de las antes descritas —cociente y pitagóricas—, existen otras identidades que se expresan por medio de una igualdad y que son válidas para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones.

No existe un método específico para verificar una identidad, sólo algunas sugerencias. Para comprobar las identidades se puede proceder de la siguiente manera:

1. Se transforma uno de los miembros de la igualdad, cualquiera de los dos, en el otro (generalmente se transforma el miembro más complicado). Se escriben las funciones en términos de senos y cosenos.
2. Se simplifica la expresión de un lado de la igualdad; la otra no se altera. Para ello se sugiere que se realicen las operaciones indicadas como factorizar, simplificar, suma de fracciones, etcétera.
3. Para poder realizar las demostraciones deberás tener un completo dominio de las definiciones de las funciones trigonométricas y las ocho relaciones fundamentales. Saberlas de memoria y sin dudas, así como sabes las tablas de multiplicar.

En la siguiente tabla se resumen las ocho relaciones fundamentales

Recíproca	Cociente	Pitagóricas
$\operatorname{sen} x \bullet \csc x = 1$	$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cos x \bullet \sec x = 1$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\tan x \bullet \cot x = 1$		$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

Como vimos en la definición, una identidad trigonométrica es cualquier igualdad que involucra funciones trigonométricas y **se verifica para cualquier ángulo.** A continuación se te mostrarán algunas identidades trigonométricas, deberás verificar que sean verdaderas.

En los siguientes ejemplos, verás cómo se pueden demostrar algunas identidades trigonométricas de acuerdo con el procedimiento antes sugerido.

Ejemplo 1. Demuestra la siguiente identidad:

$$\boldsymbol{sen\ x \bullet sec\ x \bullet cot\ x = 1}$$

Demostración:

Reescribimos el primer miembro de la igualdad, expresándolo en función de senos y cosenos; para hacerlo utilizamos las relaciones fundamentales.

$$sen\ x * \frac{1}{\cos x} * \frac{\cos x}{sen\ x} = 1$$

Reducimos términos semejantes (simplificamos la expresión).

$$\frac{sen\ x * \cos x}{\cos x * sen\ x} = 1$$

Por lo tanto: $1 = 1$

Ejemplo 2. Demostrar si la siguiente identidad es verdadera.

$$\frac{sen\ x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$$

Demostración:

Escribimos en términos de senos y cosenos utilizando las identidades recíprocas.

$$\frac{sen\ x}{1/senx} + \frac{\cos x}{1/\cos x} = 1$$

Podemos escribir la operación de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{senx}{1}}{\frac{1}{sen\,x}} + \frac{\frac{\cos x}{1}}{\frac{1}{\cos x}} = 1$$

Efectuando la operación de extremos por extremos y medios por medios tenemos:

$$sen^2\,x + cos^2\,x = 1$$

Por la identidad pitagórica el miembro de la izquierda es igual a 1, por lo tanto

$$\mathbf{1 \;=\; 1\,.}$$

Formulario de Identidades Trigonometría

Identidades Trigonométricas Fundamentales					
Pitagóricas		Recíprocas		Cociente	
Identidad	Despejes	Identidad	Despejes	Identidad	Despejes
$Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$	$Sen^2\alpha = 1 - Cos^2\alpha$	$Sen\,\alpha * Csc\,\alpha = 1$	$Sen\,\alpha = \frac{1}{Csc\,\alpha}$	$Tan\,\alpha = \frac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}$	$Sen\,\alpha = Tan\,\alpha * Cos\,\alpha$
	$Cos^2\alpha = 1 - Sen^2\alpha$		$Csc\,\alpha = \frac{1}{Sen\,\alpha}$		$Cos\,\alpha = \frac{Sen\,\alpha}{Tan\,\alpha}$
$Tan^2\alpha + 1 = Sec^2\alpha$	$Tan^2\alpha = Sec^2\alpha - 1$	$Cos\,\alpha * Sec\,\alpha = 1$	$Cos\,\alpha = \frac{1}{Sec\,\alpha}$	$Ctg\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{Sen\,\alpha}$	$Cos\,\alpha = Ctg\,\alpha * Sen\,\alpha$
	$Tan^2\alpha - Sec^2\alpha = 1$		$Sec\,\alpha = \frac{1}{Cos\,\alpha}$		$Sen\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{Ctg\,\alpha}$
$Ctg^2\alpha + 1 = Csc^2\alpha$	$Ctg^2\alpha = Csc^2\alpha - 1$	$Tan\,\alpha * Ctg\,\alpha = 1$	$Tan\,\alpha = \frac{1}{Ctg\,\alpha}$	$Sec\,\alpha = \frac{1}{Cos\,\alpha}$	$Cos\,\alpha * Sec\,\alpha = 1$
	$Ctg^2\alpha - Csc^2\alpha = 1$		$Ctg\,\alpha = \frac{1}{Tan\,\alpha}$		$Cos\,\alpha = \frac{1}{Sec\,\alpha}$
				$Csc\,\alpha = \frac{1}{Sen\,\alpha}$	$Sen\,\alpha * Csc\,\alpha = 1$
					$Sen\,\alpha = \frac{1}{Csc\,\alpha}$

Identidades Trigonométricas del Angulo doble	
$Cos\,2x = 2Cos^2x - Sen^2x$ $Tan\,2x = \frac{2\tan x}{1 - Tan^2 x}$	$Sen\,(2x) = 2\,Sen\,x\,Cos\,x$ $Cos\,2x = Cos^2x - Sen^2x$

Identidades trigonométricas la suma y la resta de ángulos	
$Sen\,(x+y) = Sen\,x\,Cos\,y + Cos\,x\,Sen\,y$ $Cos\,(x+y) = Cos\,x\,Cos\,y - Sen\,x\,sen\,y$ $Tan\,(x+y) = \frac{Tan\,x + Tan\,y}{1 - Tan\,x\,Tan\,y}$	$Sen\,(x-y) = Sen\,x\,Cos\,y - Cos\,x\,Sen\,y$ $Cos\,(x-y) = Cos\,x\,Cos\,y + Sen\,x\,sen\,y$ $Tan\,(x-y) = \frac{Tan\,x - Tan\,y}{1 + Tan\,x\,Tan\,y}$

Ejercicios

Demostraciones:

1. $\frac{sen\,x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$
2. $\tan x + \cot x = \sec x * \csc x$
3. $sen\theta * cot\theta = \cos\theta$

4. $\frac{\cot B}{\cos B} + \frac{1}{sen\, B} = 1$
5. $\tan A * \cot A = cos^2 A + Sen^2 A$
6. $\frac{\csc \beta}{\cot \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 \beta}}$
7. $\frac{\csc Z}{\sec Z} = \cot Z$
8. $\sec B * \cot B = \csc B$
9. $(\sec A - Tan\, A)(\sec A + Tan\, A) = 1$

D Razones Trigonométricas de la Suma y Resta de Ángulos

$$sen(a+b) = sen\, a \cos b + \cos a \;\; sen\, b$$

$$sen(a-b) = sen\, a \cos b - \cos a\; sen\, b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\, a\; sen\, b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\, a\; sen\, b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan \mathrm{a} * \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan \mathrm{a} * \tan b}$$

Ejemplos

1. $sen\; 15° = sen(45° - 30°) = sen45°cos30° - cos45°sen30° = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$
2. $cos15° = \cos(45° - 30°) = cos45°cos30° + sen45°sen30° = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$
3. $\tan 15° = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° * \tan 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Equivalencias entre razones trigonométricas

	En función de					
	sen	**cos**	**tg**	**cot**	**sec**	**csc**
$\text{sen}(\alpha) =$	$\text{sen}(\alpha)$	$\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\dfrac{\text{tg}(\alpha)}{\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}}{\sec(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\csc(\alpha)}$
$\cos(\alpha) =$	$\sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{\sec(\alpha)}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2(\alpha)-1}}{\csc(\alpha)}$
$\text{tg}(\alpha) =$	$\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$\text{tg}(\alpha)$	$\dfrac{1}{\cot(\alpha)}$	$\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2(\alpha)-1}}$
$\cot(\alpha) =$	$\dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}}{\text{sen}(\alpha)}$	$\dfrac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{\text{tg}(\alpha)}$	$\cot(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}}$	$\sqrt{\csc^2(\alpha)-1}$
$\sec(\alpha) =$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}}$	$\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$	$\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}{\cot(\alpha)}$	$\sec(\alpha)$	$\dfrac{\csc(\alpha)}{\sqrt{\csc^2(\alpha)-1}}$
$\csc(\alpha) =$	$\dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}}{\text{tg}(\alpha)}$	$\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}$	$\dfrac{\sec(\alpha)}{\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}}$	$\csc(\alpha)$